Если на поверхности V_p зафиксирована сеть Σ_p и векторы $\vec{e}_i$ направлены по касательным к линиям этой сети, то формы ω_i^j и формы $\bar{\omega}_i^j$ $(i\neq j)$ становятся главными [1] $\omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k$, $\bar{\omega}_i^j=\bar{a}_{ik}^j\omega^k$. Если линия ω^i сети Σ_p -асимптотическая относительно конусов $\Phi^\alpha=0$ ($\Phi^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^i\omega^j$, где $\{b_{ij}^\alpha\}$ есть подтензор второго основного тензора $\{b_{ij}^\alpha\}$ поверхности V_p, то она в силу строения компонент тензора h_{ik}^j является f -главной [2]. Обратное в общем случае неверно.

Если линия ω^i сети $\Sigma_p\subset V_p$ является асимптотической относительно конусов $\Phi^\alpha=0$, то линия $\bar{\omega}_1^i$ является геодезической тогда и только тогда, когда линия ω^i -геодезическая.

Рассмотрим линии ω^i и ω^j сети $\Sigma_p\subset V_p$. Из соотношений (2) можно записать

$$\bar{a}_{ij}^j=a_{ij}^j+h_{ij}^j\ ,\quad \bar{a}_{ij}^k=a_{ij}^k+h_{ij}^k\quad (i\neq j\ ,\ k\neq i,j\ ). \qquad (3)$$

Справедливо утверждение:

Если сеть Σ_p частично чебышевская $(\vec{a}_{ij}=\vec{0}\ ,\ i\neq j\ )$, то направления, касательные к линиям $\bar{\omega}^i$ и $\bar{\omega}^j$, f-сопряжены [2] тогда и только тогда, когда сеть $\bar{\Sigma}_p$ является частично чебышевской $(\vec{a}_{ij}=\vec{0}\ ,\ i\neq j\ )$. Если сеть Σ_p чебышевская, то из (2) получим $\vec{a}_{ij}^i=h_{ij}^i\ ,\ \vec{a}_{ij}^j=h_{ij}^j\ ,\ \vec{a}_{ij}^k=h_{ij}^k\ (i\neq j\ ,\ k\neq i,j)$. Отсюда видно, что необходимым и достаточным условием сохранения сетью свойства быть чебышевской в отображении f является f -сопряженность этой сети.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве: Литовский матем.сб.| АН Лит.ССР.- Вильнюс, 1966. Т.6. № 4. С.475-490.

2. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии отображений гладких многообразий|| Тез.докл. VI Прибалт.геометр.конф.- Таллин. Изд-во Тартуского ун-та, 1984. С.18.

3. Н и к о л а е в с к а я Т.Е. О задаче Фубини-Чеха в евклидовом пространстве E_4|| Тез.докл. VII Всесоюзн. конф. по современным проблемам геометрии.- Минск: Изд-во БГУ, 1979. С.138.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ КОНИК, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ОДНОМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ КВАДРИК

И.П. К о р н е в а

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрены двупараметрические семейства (конгруэнции) $\mathcal{L}$ невырожденных коник C [1], принадлежащих одномерному многообразию квадрик Q. Доказано, что конгруэнции $\mathcal{L}$ существуют с произволом двух функций двух аргументов и исследованы подклассы со специальными свойствами ассоциированных геометрических образов.

Отнесем конгруэнцию к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_3 является характеристической точкой плоскости коники $C\in\mathcal{L}$, A_1 и A_2 -точки пересечения поляры точки A_3 с коникой C, точка A_4 помещена в полюс плоскости коники C относительно квадрики Q.

Деривационные формулы подвижного репера имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta\ , \qquad (1)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \qquad (2)$$

и условию эквипроективности: $\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$.

В выбранном репере уравнения квадрики Q и коники C с учетом ее принадлежности квадрике Q соответственно примут вид:

$$F\equiv(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2=0\ , \qquad (3)$$

$$f\equiv(x^3)^2-2x^1x^2=0\ ,\quad x^4=0\ . \qquad (4)$$

Рассмотрим общий случай, когда плоскости коник образуют двупараметрическое семейство, а касательная плоскость к поверхности (A_4) не содержит прямой A_1A_2. Тогда

$$\omega_1^4 \wedge \omega_2^4 \neq 0, \quad \omega_4^3 \neq 0. \tag{5}$$

Система Пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{L}$ запишется в виде:

$$\begin{gathered}\omega_3^4 = 0, \ \ \omega_3^i - \omega_j^3 = p_i\,\omega_4^3, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4 = a\,\omega_4^3, \\ \omega_4^4 - \omega_3^3 = b\,\omega_4^3, \ \ \omega_4^j - \omega_i = c_i\,\omega_4^3, \ \ \omega_4^3 = n^k\omega_k, \\ \omega_1^3 = a\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2, \ \ \omega_2^3 = \Gamma_2^{3k}\omega_k, \ \ \omega_i^j = m_i\,\omega_4^3 \ \ (i,j,k = 1,2),\end{gathered} \tag{6}$$

где $\omega_i^4 = \omega_i$ приняты в качестве базисных, причем $i \neq j$ и суммирование по индексам i,j не производится. Анализируя систему (6), убеждаемся, что конгруэнция $\mathcal{L}$ существует с произволом двух функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathcal{L}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{L}$, обладающая следующими свойствами: 1) поверхности (A_i) вырождаются в линии, 2) касательная к координатной линии $\omega_2 = 0$ на поверхности (A_4) пересекает прямую A_1A_2.

Конгруэнция $\mathcal{L}_1$ выделяется из конгруэнции $\mathcal{L}$ конечными соотношениями:

$$\Gamma_i^{3j} = 0, \quad m_i = 0, \quad n_1 = 0, \quad n_2 \neq 0. \tag{7}$$

Учитывая равенства (7) в системе (6), убеждаемся, что конгруэнция $\mathcal{L}_1$ определяется системой уравнений Пфаффа

$$\begin{gathered}\omega_3^4 = 0, \ \ \omega_i^j = 0, \ \ \omega_4^3 = n^2\omega_2, \ \ \omega_4^4 - \omega_3^3 = b\,\omega_4^3, \ \omega_i^3 = \Gamma_i^{3i}\omega_i, \\ \omega_3^i - \omega_j^3 = p_i\,\omega_4^3, \ \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4 = a\,\omega_4^3, \ \ \omega_4^j = \omega_i + c_i\,\omega_4^3\end{gathered} \tag{8}$$

и конечными соотношениями:

$$\Gamma_1^{31} = \Gamma_2^{32} + p_1 n^2, \quad c_1 + \Gamma_1^{31} p_2 = 0. \tag{9}$$

Т е о р е м а 1. Конгруэнция $\mathcal{L}_1$ обладает следующими свойствами: 1) точки A_i одновременно являются фокальными точками коники C и квадрики Q [2]; 2) точка A_1 является характеристической точкой координатной плоскости $(A_1A_3A_4)$; 3) одно семейство торсов прямолинейных конгруэнций (A_1A_3) и (A_1A_4) соответствует координатным линиям $\omega_1 = 0$; 4) поверхность (A_1) является фокальной поверхностью прямолинейной конгруэнции (A_1A_4); 5) прямолинейная конгруэнция (A_1A_2) является совокупностью прямых, инцидентных одной плоскости, тогда и только тогда, когда касательные к линиям (A_i) пересекаются.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнция $\mathcal{L}_1$ называется конгруэнцией $\mathcal{L}_{1,1}$, если $p_1 = 0$, $p_2 = 0$.

Из определения конгруэнции $\mathcal{L}_{1,1}$ следует, что ее система уравнений Пфаффа имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega_3^4 = 0, \ \omega_i^j = 0, \ \ \omega_i^3 = a\omega_i, \ \ \omega_4^3 = n^2\omega_2, \ \omega_4^4 - \omega_3^3 = b\omega_4^3, \\ \omega_3^i = \omega_j^3, \ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\,\omega_4^4 = a\,\omega_4^3, \ \ \omega_4^i = \omega_j, \ da = (ab-1)\,\omega_4^3, \\ (dn^2 + n^2(\omega_2^2 - \omega_4^4)) \wedge \omega_2 = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

где $c_2 = 0$, $b = (1-a^2)/2a$, $an^2 \neq 0$.

Анализируя систему (10), убеждаемся в том, что конгруэнции $\mathcal{L}_{1,1}$ существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция $\mathcal{L}_{1,1}$ обладает следующими свойствами: 1) прямолинейная конгруэнция (A_1A_4) является параболической; 2) касательная к линии $\omega_1 = 0$ на поверхности (A_4) пересекает прямую A_1A_3; 3) касательные плоскости к ассоциированным поверхностям (M_i) совпадают; 4) одно семейство торсов прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) соответствует на поверхности (M_1), другое – на поверхности (M_2) линиям, огибаемым прямыми A_1A_2; 5) для конгруэнции $\mathcal{L}_{1,1}$ прямолинейные конгруэнции (A_3A_4) и (A_1A_2) односторонне расслояемы от (A_3A_4) к (A_1A_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (A_1A_4) имеет вид $(\omega_1)^2 = 0$. Точка A_1 является ее сдвоенным фокусом, откуда и следует утверждение 1). Утверждение 2) непосредственно следует из равенства: $dA_4\big|_{\omega_1=0} = \omega_4^4 A_4 + \omega_1 A_2 + \omega_2(A_1 + n^2A_3) = \omega_4^4 A_4 + \omega_2(A_1 + n^2A_3)$.
3) Имеем:

$$\begin{aligned} dM_1 &= \omega_2^2 M_1 + (\omega_1^1 - \omega_2^2)A_1 + (\omega_1 + \omega_2)(aA_3 + A_4), \\ dM_2 &= \omega_2^2 M_2 + (\omega_1^1 - \omega_2^2)A_1 + (\omega_1 - \omega_2)(aA_3 + A_4). \end{aligned} \tag{11}$$

Так как M_1A_1 и M_2A_2 – одна и та же прямая A_1A_2, то из (11) следует, что касательные плоскости к поверхностям определяются одними и теми же точками A_1, A_2 и aA_3+A_4, т.е.эти плоскости сопадают. 4)Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) имеет вид: $(\omega_1)^2-(\omega_2)^2=0$. Из (11) имеем: $dM_1\big|_{\omega_1+\omega_2}=\omega_2^2M_1+(\omega_1^1-\omega_2^2)A_1$, $dM_2\big|_{\omega_1-\omega_2=0}=\omega_2^2M_2+(\omega_1^1-\omega_2^2)A_1$, откуда и вытекает заключение утверждения 4).

Т е о р е м а 3. Поверхность (A_3), огибаемая плоскостями коник $C\in\mathcal{L}_{1,1}$, является линейчатой квадрикой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий на поверхности (A_3) записывается в виде: $\omega_1\omega_2=0$. Так как $dA_3=\omega_3^3A_3+a(\omega_1A_2+\omega_2A_1)$, то прямая A_3A_i является асимптотической касательной к линии $\omega_i=0$. Имеем: $d[A_3A_i]\big|_{\omega_i=0}=(\omega_3^3+\omega_i^i)[A_3A_i]$. Следовательно, асимптотические линии $\omega_i=0$ являются прямыми линиями, т.е. поверхность (A_3) – линейчатая квадрика. Уравнение этой квадрики совпадает с уравнением квадрики Ли к поверхности (A_3) в точке A_3 и имеет вид:

$$(a^2-1)(x^4)^2+2x^1x^2-2ax^3x^4=0. \tag{12}$$

Т е о р е м а 4. Координатные линии соответствуют асимптотическим линиям на ассоциированной квадрике (A_3).

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из уравнения (11).

Т е о р е м а 5. Если $a=1$, то репер $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ является автополярным тетраэдром III рода.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя $a=1$ в уравнение (12), получим уравнение квадрики Ли в виде $x^1x^2-x^3x^4=0$. Такой вид уравнение квадрики Ли принимает в автополярном тетраэдре III рода.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М., 1981. Т.12. С.31-60.

2. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве: Тр.Геометр.семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М., 1974. Т.6. С.113-134.

УДК 514.75

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ПАРА КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК

Л.Г. К о р с а к о в а

В [1] в трехмерном проективном пространстве рассматривалась пара $\mathcal{D}$ конгруэнций кривых второго порядка, не лежащих в одной плоскости и имеющих две общие точки, причем плоскости коник образуют двумерные многообразия. Исследован частный класс пар $\mathcal{D}$, для которого получена полная совокупность свойств, позволяющих осуществить геометрическое построение.

Пара $\mathcal{D}$ исследовалась в репере $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где вершины A_1 и A_2 помещались в точки пересечения коник C_1 и C_2, A_3 и A_4 – полюсы прямой A_1A_2 относительно коник C_1 и C_2 соответственно.

О п р е д е л е н и е. Пара $\mathcal{D}$ называется характеристической, если: 1) коники C_1 и C_2 конгруэнций (C_1) и (C_2) инцидентны одной квадрике Q; 2) поверхности (A_3) и (A_4) являются характеристическими; 3) линии на поверхности (A_3), огибаемые прямыми A_1A_3, A_2A_3, являются ее асимптотическими линиями.

Коники C_1, C_2 и квадрика Q в репере R при соответствующей нормировке вершин определяются уравнениями:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0;\ (x^4)^2-2x^1x^2=0,\ x^3=0, \tag{1}$$

$$(x^3)^2+(x^4)^2-2x^1x^2+2cx^3x^4=0. \tag{2}$$

Система уравнений Пфаффа характеристической пары $\mathcal{D}$ имеет вид:

$$\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=\gamma\omega_i,\ \omega_3^i=\omega_j^3+c\omega_j,\ \omega_4^i=c\omega_j^3+\omega_j, \tag{3}$$